13 Equations de droites

Livre p.214.

Objectifs :

- Reconnaître et savoir utiliser l'équation réduite d'une droite
- Calculer et interpréter le coefficient directeur
- Caractériser des droites parallèles par leur coefficient directeur
- Interpréter graphiquement un système de deux équations à deux inconnues

Aperçu historique :

Ce sont Marino Ghetadi, puis René Descartes qui proposent de résoudre les problèmes de géométrie par le recours systématique au calcul algébrique. Dans sa Géométrie de 1637, le philosophe en formule le principe. Il s'agit de représenter grandeurs connues et inconnues par des lettres, et de trouver autant de relations entre grandeurs connues et inconnues qu'il y a d'inconnues au problème. On y reconnaît bien une démarche analytique, conduisant à des systèmes d'équations qu'il s'agit de réduire à une seule équation. Pierre de Fermat est le premier à faire, à la même époque, un usage systématique des coordonnées proprement dites pour résoudre les problèmes de lieux géométriques. Il fait intervenir notamment les premières équations de droites, paraboles ou hyperboles. Il présente ces idées dans Ad locus planos et solidos isagoge, en 1636, texte publié après sa mort. Dans les notations de Descartes, contrairement à Fermat, les constantes sont continuellement notées a, b, c, d, ... et les variables x, y, z. Il s'oppose en cela à la tradition de l'époque et un lecteur d'aujourd'hui s'en trouve moins dérouté.

1. Équation réduite, coefficient directeur

A. Équation réduite d'une droite

Théorème 13.1 Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit d une droite du plan.
On a deux cas possibles :

si d est parallèle à $(O;\vec{j})$, alors il existe un réel c tel que
$M(x;y) \in d$ si et seulement si $x = c$;

si d n'est pas parallèle à $(O;\vec{j})$, alors il existe deux réels m et p tels que
$M(x;y) \in d$ si et seulement si $y = mx + p$.

Démonstration Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts de la droite d. Soit $M(x;y)$ un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
M \in d &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires.}\\
&\iff x_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{AM}} - x_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{AB}} = 0 \text{ (voir le Théorème 9.1)}\\
&\iff (x_B - x_A)(y - y_A) - (x - x_A)(y_B - y_A) = 0\\
&\iff (x_B - x_A)y = (y_B - y_A)x + y_Ax_B - y_Ax_A - x_Ay_B + x_Ay_A\\
&\iff (x_B - x_A)y = (y_B - y_A)x + y_Ax_B - x_Ay_B
\end{aligned}$$

On a alors deux possibilités :

soit $x_B - x_A = 0$ (c'est le cas si d est parallèle à $(O;\vec{j})$: tous les points de d ont la même abscisse). L'équation devient alors $(y_B - y_A)x = x_Ay_B - x_By_A$.
C'est à dire $(y_B - y_A)x = x_Ay_B - x_Ay_A$. Or A et B sont distincts et $x_A = x_B$ donc $y_B - y_A \neq 0$; d'où en divisant par $y_B - y_A$, on obtient alors : $x = \frac{x_A(y_B - y_A)}{y_B - y_A}$.
En posant $c = x_A$, on a alors $x = c$.

soit $x_B - x_A \neq 0$ (c'est le cas si d n'est pas parallèle à $(O;\vec{i},\vec{j})$: deux points de d ne peuvent avoir la même abscisse). On divise alors par $(x_B - x_A)$ et l'équation devient : $y = \frac{(y_B - y_A)x + y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$.
C'est à dire : $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$. On pose alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $p = \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$.
On a alors $y = mx + p$.

Interprétation graphique :
m est appelé coefficient directeur ou ***pente*** de la droite : en effet, m est égale à la tangente de l'angle que la droite forme avec l'horizontale (se démontre avec la trigonométrie de collège dans un triangle rectangle).
p est ***l'ordonnée à l'origine*** de la droite : elle correspond à la "graduation" en laquelle la droite coupe l'axe de ordonnées.

Définition 13.1 Dans les conditions du théorème 13.1 et avec les notations de la démonstration,

si d est parallèle à $(O;\vec{j})$, l'équation $x = c$ est appelée *équation réduite* de la droite d et on dit que le vecteur $\vec{j}$ est un vecteur *directeur* de d ;

si d n'est pas parallèle à $(O;\vec{j})$, l'équation $y = mx + p$ est appelée *équation réduite* de la droite d et on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur *directeur* de d.
Le réel m est appelé *coefficient directeur* ou *pente* de d et le réel p *ordonnée à l'origine* de d.

Exemple Soit $A(1;2)$, $B(-2;3)$ et $C(1;-3)$ trois points dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) puis de la droite (AC).
Soit $M(x;y)$ un point du plan. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(-3;1)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x-1;y-2)$.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff -3(y-2) - 1(x-1) = 0 \text{ (Théorème 9.1)} \\ &\iff -3y + 6 = x - 1 \\ &\iff y = -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{7}{3} \end{aligned}$$

Ainsi l'équation réduite de (AB) est $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

De même pour la droite (AC) :
Soit $M(x;y)$ un point du plan. Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $(0;-5)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x-1;y-2)$.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff A, C \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ &\iff \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff 0 \times (y-2) - (-5) \times (x-1) = 0 \text{ (Théorème 9.1)} \\ &\iff 5x - 5 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Ainsi l'équation réduite de (AC) est $x = 1$.

Théorème 13.2 (Réciproque) Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Soit m, p et c trois réels quelconques,

- l'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'équation $y = mx + p$ est une droite coupant l'axe des ordonnées au point $P(0;p)$;
- l'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'équation $x = c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Démonstration :

- Soit $A(0,p)$ et $B(1,m+p)$. Les coordonnées de ces deux points vérifient l'équation $y = mx + p$. Montrons que l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant cette équation sont sur la droite (AB) :
  Soit $M(x;y)$ tel que $y = mx + p$. On a $\overrightarrow{AB}(1;m)$ et $\overrightarrow{AM}(x;y-p)$; c'est à dire $\overrightarrow{AM}(x;mx)$.
  On a : $1 \times mx - m \times x = mx - mx = 0$. En utilisant le théorème 9.1, on déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Donc les points A, B et M sont alignés. Le point M appartient donc bien à une droite qui coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée p.
- Tous les points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x = c$ ont la même abscisse. Ils sont donc alignés sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

B. Coefficient directeur

Propriété 13.1 Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ avec $x_A \neq x_B$.
Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Démonstration On a $x_A \neq x_B$ donc l'équation réduite de la droite est du type $y = mx + p$. Les points A et B sont sur la droite donc leurs coordonnées vérifient l'équation de la droite. On a donc $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$; en soustrayant ces deux égalités on obtient $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$ donc $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
On peut même obtenir $p = y_A - mx_A = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times x_A$.

Exemple L'algorithme ci-dessous détermine l'équation réduite d'une droite dans un repère dont on connaît deux points par leur coordonnées.

```
Entrées : Les coordonnées des points A et B;
début
    si x_A = x_B alors
        Afficher « l'équation réduite de (AB) est x = x_A » ;
    sinon
        m ← (y_B − y_A)/(x_B − x_A);
        p ← y_A − m × x_A;
        Afficher « l'équation réduite de (AB) est y = mx + p » ;
```

Algorithme 8 : Détermination de l'équation d'une droite

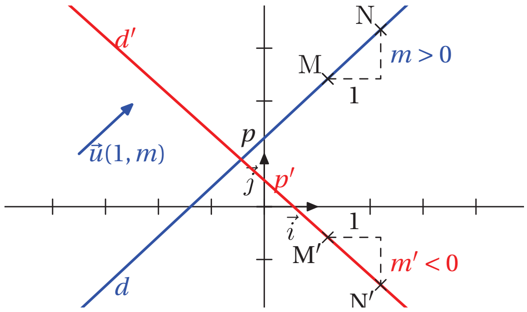
Interprétation graphique : Le coefficient directeur m est aussi appelé *pente* de la droite ; il est égal à la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'horizontale.

2. Droites parallèles

Théorème 13.3 (Droites parallèles) Soit deux droites d et d' d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

$$d \,//\, d' \iff m = m'$$

Interprétation graphique de m et p :
p est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées (yy').
m est la différence des ordonnées de deux points M et N de d tels que $x_N = x_M + 1$.
Le vecteur $\overrightarrow{MN} = \vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de d.



Propriété 13.2 (Lien entre équations de droite et fonctions affines) La représentation d'une fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ est la droite d d'équation réduite $y = mx + p$.

3. Interprétation d'un système

Définition 13.2 Une équation du premier degré [a] à deux inconnues x et y est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont trois réels [b].

a. On dit aussi « linéaire ».
b. Le cas où $a = b = 0$ n'a pas vraiment d'intérêt...

Remarque :

- si $b \neq 0$, une telle équation peut s'écrire $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$: c'est alors l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées ;
- si $b = 0$ et $a \neq 0$, une telle équation peut s'écrire $x = \frac{c}{a}$: c'est alors l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition 13.3 Un système d'équations linéaires à deux inconnues x et y est un couple d'équations s'écrivant sous la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$
Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples $(x;y)$ qui vérifient simultanément les deux équations du système.

Interprétation graphique :

On étudie le cas où a et b d'une part et a' et b' d'autre part ne sont pas simultanément nuls.
Dans ce cas, on peut associer à chacune des deux équations une droite [1] dans un même repère. Les solutions du système seront alors les coordonnées des points communs aux deux droites. Il existe donc trois cas possibles : les droites sont sécantes (un point commun), les droites sont parallèles strictement (pas de point commun) ou les droites sont confondues (une infinité de points communs).

Exemple Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=4 \end{cases}$

Propriété 13.3 Les droites associées aux deux équations d'un système du type $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ sont parallèles si et seulement si $a'b-ab'=0$.

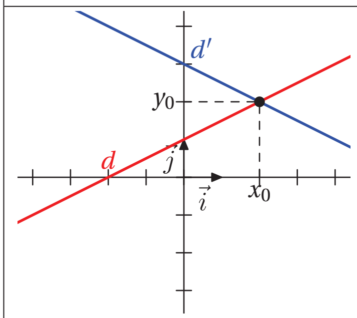
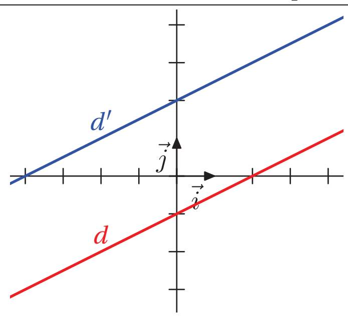
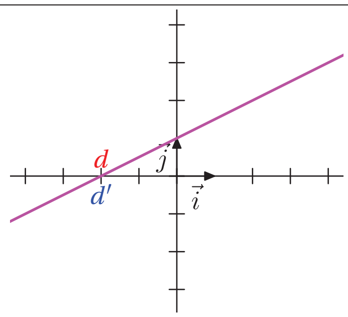
Conséquence :

Le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ admet une unique solution si et seulement si $a'b-ab'\neq 0$.

Démonstration :

- si $b\neq 0$ et $b'\neq 0$ les droites d et d' ont pour coefficients directeurs respectifs $-\frac{a}{b}$ et $-\frac{a'}{b'}$. Ainsi d et d' sont parallèles si et seulement si $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$ qui s'écrit aussi $ab'-a'b=0$;
- si $b=0$ alors d est une droite parallèle à (Oy). Donc les droites d et d' sont parallèles si et seulement si b' est aussi nul. Dans ce cas on a $ab'-a'b=0$. Et réciproquement si $ab'-a'b=0$ alors $ab'=0$ (car $b=0$), or $a\neq 0$, donc $b'=0$; Donc les droites d et d' sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.
- si $b'=0$, même démonstration que le point précédent.

Le tableau suivant regroupe les cas où b et b' sont non nuls :

Si $ab'-a'b\neq 0$	Si $ab'-a'b=0$	
	Ordonnées à l'origine distinctes : $\frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'}$	Même ordonnée à l'origine : $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$
Les droites sont sécantes	Les droites sont strictement parallèles	Les droites sont confondues
		
Une unique solution $(x_0;y_0)$	Pas de solution	Tous les couples de coordonnées des points des droites sont solution.

1. Droites qu'on notera respectivement d et d'.

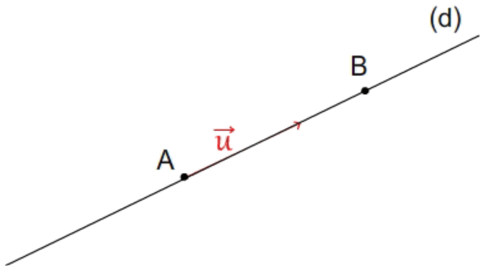
4. Vecteurs directeurs d'une droite

A. Définition, premières propriétés.

Soient d une droite, et A et B deux points distincts de cette droite.
On peut alors dire que la direction de la droite d est la même que la direction du vecteur $\vec{AB}$.

Définition 13.4 On appelle ***vecteur directeur*** d'une droite d tout vecteur $\vec{AB}$ où A et B dont deux points distincts de d.

Tout vecteur (non nul) $\vec{u}$ qui a la même direction que d est aussi un vecteur directeur de d. Une droite a ainsi une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur de d est aussi un vecteur directeur de d.



Propriété 13.4 Ainsi, une droite peut être définie par un point et un vecteur directeur.

Un vecteur directeur définit une "famille de parallèles", et le point définit laquelle parmi ces parallèles est la droite qui nous intéresse.

Propriété 13.5 Dans le cas particulier d'une droite définie par une équation réduite du type $y = mx + p$, un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ m \end{vmatrix}$

Démonstration Soient $m, p \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, et soit d la droite d'équation $y = mx + p$.
Montrons que $\vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ m \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
Soient $A(x_0; y_0) \in d$ et $M(x; y) \in d$ distincts. Alors $\vec{AM}$ est par définition un vecteur directeur de d.
Or $\vec{AM}\begin{vmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{vmatrix}$, avec, puisque A et M sont des points de d, $y_0 = mx_0 + p$ et $y = mx + p$.
D'où $\vec{AM}\begin{vmatrix} x - x_0 \\ (mx + p) - (mx_0 + p) \end{vmatrix}$, i.e. $\vec{AM}\begin{vmatrix} x - x_0 \\ m(x - x_0) \end{vmatrix}$.
Comme tout vecteur colinéaire à $\vec{AM}$ est aussi directeur de d, en particulier en divisant chaque composante du vecteur $\vec{AM}$ par $(x - x_0)$ on obtient $\vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ m \end{vmatrix}$ directeur de d.

B. Vecteur directeur et parallélisme

Une conséquence immédiate de la définition d'un vecteur directeur de droite est :

Propriété 13.6 Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Ceci revient à dire que deux droites sont parallèles ssi tout vecteur directeur de l'une est colinéaire à tout vecteur directeur de l'autre.
On retrouve la caractérisation du parallélisme par l'égalité des pentes pour des droites définies par leurs équations réduites : les droites $d | y = mx + p$ et $d' | y = m'x + p'$ sont parallèles ssi leurs vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ m \end{vmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{vmatrix} 1 \\ m' \end{vmatrix}$ sont colinéaires.
Or ils sont colinéaires ssi leur déterminant $det(\vec{u}, \vec{u'}) = m - m'$ est nul, i.e. ssi $m = m'$.

5. Équation cartésienne d'une droite

Comme on l'a vu dans la démonstration au sujet de l'équation réduite d'une droite, pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ points distincts de la droite d et $M(x; y)$ point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
M \in d \quad &\iff \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires.}\\
&\iff \quad det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0\\
&\iff \quad x_{\overrightarrow{AM}} y_{\overrightarrow{AB}} - x_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AM}} = 0\\
&\iff \quad (x - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0\\
&\iff \quad (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + y_A x_B - y_A x_A - x_A y_B + x_A y_A = 0\\
&\iff \quad (y_B - y_A)x + (x_A - x_B)y + (x_B y_A - x_A y_A - x_A y_B + x_A y_A) = 0
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est de la forme :

$\underbrace{(y_B - y_A)}_{a} x + \underbrace{(x_A - x_B)}_{b} y + \underbrace{(x_B y_A - x_A y_A - x_A y_B + x_A y_A)}_{c} = 0$ Ainsi, toute droite (verticale ou non) admet une équation de la forme

$ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Définition 13.5 Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
Un point appartient à cette droite d ssi ses coordonnées vérifient cette équation.
Cette équation est appelée ***équation cartésienne de la droite*** d.

Avec les mêmes notations que ci-dessus, un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{AB} \left| \begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix} \right.$. Or $x_B - x_A = -b$ et $y_B - y_A = a$.

Propriété 13.7 Dans le plan, la droite dont une équation est $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$, admet pour vecteur directeur $\vec{u} \left| \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix} \right.$.

Cette approche donne un nouvel éclairage sur l'interprétation des systèmes d'équations comme intersection éventuelle de deux droites du plan.